高等数学习题册 (上)

v0.0.5

这本书是高等数学习题集（同济大学配套资料，由北京大学出版社出版）的电子化版本。 本书大量借助 AI 进行处理，题干部分经由人工校对，但答案和解析部分主要由 AI 生成。

由于人手不足，可能存在错误，请读者自行甄别。

如遇错误、疑惑，欢迎提交 issue 或 pull request 进行讨论、修正。（地址：https://github.com/xihale/digital-tongji-calculus-exercises）

目录

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、判断题

1. $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$ 是两个相同的函数. (　　)

2. $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$ 是两个相同的函数. (　　)

二、选择题

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} -\sin^3 x & \text{if } -\pi\le x\le 0 \\ \sin^3 x & \text{if } 0<x\le\pi \end{cases}$ 则此函数是(　　).

   A. 周期函数

   B. 单调增函数

   C. 奇函数

   D. 偶函数

4. 设函数 $f(x)=e^x, g(x)=\sin^2 x$ ，则 $f[g(x)]=($　　$)$.

A. $e^{\sin^2 x}$

B. $\sin^2 e^x$

C. $e^x \sin^2 x$

D. $\left(\sin^2 x\right)^{e^{x^2}}$

三、计算题

5. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\arctan(x-3)$;

(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$ ，求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$

(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)+f(x-a) \quad (a>0)$.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=\sin x-\cos x+1$;

(2) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

四、证明题

8．设下列所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 内的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

第二节 数列的极限

一、选择题

1.下列数列 $\{x_n\}$ 中，收敛的是(　　)

A. $x_n=(-1)^n\frac{n-1}{n}$

B. $x_n=\frac{n}{n+1}$

C. $x_n=\sin(\frac{\pi}{2}n)$

D. $x_n=n-(-1)^n$

2.下列数列 $\{x_n\}$ 中，发散的是(　　).

A. $x_n=\frac{1}{2^n}$

B. $x_n=5+\frac{(-1)^n}{n^2}$

C. $x_n=\frac{2n-1}{3n+2}$

D. $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$

二、填空题

3. 设数列 $\{u_n\}$ 的一般项是 $u_n=\frac{3n+1}{2n+1}$ ，当 $n\geq$ ________ 时，不等式 $|u_n-\frac{3}{2}|<0.01$ 成立。

三、计算题

4．下列数列是否收敛？对于收敛数列，通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：（1）$\{n(-1)^n\}$

(2) $\left\{[(-1)^n+1]\frac{n+1}{n}\right\}$.

四、证明题

5．根据数列极限的定义，证明：（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-3}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}$;

(4) 若 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ ，则 $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 反过来成立吗？成立给出证明，不成立举出反例.

第三节 函数的极限

一、选择题

1. $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ (　　)

A. -1

B. 0

C. 1

D. 不存在

2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 存在且相等是 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的(　　).

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 无关条件

3. 设函数 $f(x)=\frac{2x+\ |x|}{4x-3|x|}$ ，则 $\lim_{x\to 0} f(x) = ($　　$)$.

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 不存在

二、填空题

4. 当 $0<|x-3|<\delta$ 时，取 δ = ____________，$|\frac{x^2-9}{x-3}-6|<\varepsilon$ 成立。

三、计算题

5．对于图 1-1 所示的函数 $f(x)$ ，求下列极限，若极限不存在，说明理由：

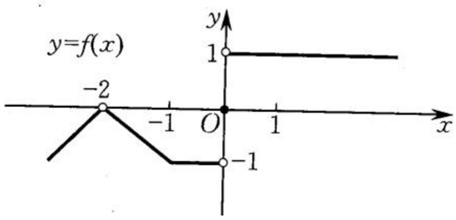

Figure 1: 图 1-1

(1) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(2) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(3) $\lim_{x\to 0} f(x)$

6. 求函数 $f(x)=\frac{x}{x}$ ，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

四、证明题

7. 根据函数极限的定义，证明：(1) $\lim_{x\to 2}(5x+2)=12;$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

第四节 无穷小与无穷大

第五节 极限运算法则

一、选择题

1．函数 $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ 在( )的变化过程中为无穷大

A. $x\to 0$

B. $x\to 1$

C. $x\to -1$

D. $x\to \infty$

二、计算题

2．计算下列极限： (1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$

(5) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

(6) $\lim_{x\to 0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(7) $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x}$

3. 函数 $y = x\cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是否有界? 这个函数是否为 $x \to +\infty$ 时的无穷大? 为什么?

三、证明题

4. 证明: 函数 $y = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但并不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

第六节 极限存在准则 两个重要极限

一、选择题

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\sin x}{\cos x}$ (　　)

A. 1

B. ∞

C. 不存在

D. 0

2. $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$ (　　)

A. $2e$

B. e^{-2}

C. e^{2}

D. $\frac{2}{e}$

二、填空题

3. 设 $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{3}$，则 $k =$ __________.

4. 设 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$ ，则 $a=$ __________.

三、计算题

5.计算下列极限： (1) $\lim_{x\to0}x\cot x$;

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}2^n\sin(\frac{x}{2^n})$ (x 为不等于零的常数);

(4) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(6) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}(k\in N_{+})$.

四、证明题

6．利用极限存在准则，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\ldots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

(2) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ 的极限存在;

(3) $\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

第七节 无穷小的比较

一、填空题

1. 当 $x \to 0$ 时, $2x - x^2$ 是 $x^2 - x^3$ 的 ________ 阶无穷小。

2. 设 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+ax+b}{1-x} = 5$ ，则 $a =$ ________, $b =$ ________ .

二、计算题

3．利用等价无穷小的性质，求下列极限：(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}$.

4．设 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=l(l\neq\infty)$，试求 a 和 l 的值

三、证明题

5．证明: 当 $x\to 0$ 时, 有 $\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

第八节 函数的连续性与间断点

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{x}{3}\right) & \text{if } x\neq 0\\ a & \text{if } x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __________.

二、计算题

2. 下列函数在指定点处间断，说明这些间断点属于哪一类，如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使函数在该点处连续：

(1) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}; x=1, x=2;$

(2) $y=\begin{cases}x-1 & \text{if } x\leq 1\\ 3-x & \text{if } x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处间断.

3. 讨论函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性, 若有间断点, 则判断其类型.

4. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，试给出一个反例:

(1) 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续, 那么函数 $|f(x)|$ 也在点 $x=a$ 处连续;

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处连续, 那么函数 $f(x)$ 也在点 $x=a$ 处连续.

第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性

一、选择题

1．设函数 $f(x)=\frac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

2．设函数 $f(x)=\begin{cases} x \text{ if } x\geq 0 \\ 0 \text{ if } x<0 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x+1 \text{ if } x<1 \\ x \quad \text{ if } x\geq 1 \end{cases}$ 则 $f(x)+g(x)$ 的连续区间是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

D. $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

3．已知当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\sim ax$ ，则常数 $a=$ (　　)

A. 1

B. -1

C. 2

D. –2

4.当 $x \to 1$ 时， $1-x$ 是 $1-\sqrt[3]{x}$ 的(　　)

A. 等价无穷小

B. 高阶无穷小

C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小

二、填空题

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{if } x<0 \\ a+x & \text{if } x\geq 0. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __________

三、计算题

6．求下列极限：（1）$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$ ；

(2) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$;

(5) $\lim_{x\to 0}\left(1+3\tan^2 x\right)^{\cot^2 x}$;

(6) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

7.设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)} & \text{if } x\neq 1 \\ x\neq -2 & \\ 2 & \text{if } x=1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，试求 a,b 的值

四、证明题

8．设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，证明：$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 在点 x_0 处也连续

第十节 闭区间上连续函数的性质

一、证明题

1．证明: 方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

2．证明: 方程 $x = a\sin x + b (a > 0, b > 0)$ 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0 \leq f(x) \leq 1$. 试证：在 $[0,1]$ 上必存在一点 c ，使得 $f(c)=c$ (c 称为函数 $f(x)$ 的不动点).

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续， $a<x_1<x_2<...<x_n<b(n \geq 3)$ ，证明：在区间 (x_1,x_n) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}$.

总习题一

一、选择题

1. 当 $x \to 0$ 时， $(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的(　　).

A. 高阶无穷小

B. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

C. 低阶无穷小

D. 等价无穷小

2. 设 $f(x)$ 为奇函数, 则下列函数中 (　　) 也为奇函数.

A. $f(x)+C$，其中 C 为非零常数

B. $f(-x)+C$，其中 C 为非零常数

C. $f(x)+f(-x)$

D. $f[f(x)]$

3. 设函数 $f(x)=x^2+\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

二、填空题

4. 数列 $\{x_n\}$ 有界是 $\{x_n\}$ 收敛的 ________ 条件

5．函数 $f(x)=\frac{x-2}{\ln|x-1|}$ 的一个无穷间断点是 ____________

6．设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & \text{if } x<-1 \\ b & \text{if } x=-1 \\ a+\arccos x & \text{if } -1<x\leq 1\end{cases}$ 在点 $x=-1$ 处连续，则 $a=$ ____________， $b=$ ____________.

7．函数 $f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ 的间断点是 ____________，是第 ____________ 类间断点。

三、计算题

8．求下列极限：(1) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

四、证明题

9. 根据函数极限的定义，证明： $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

10. 证明: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

11. 证明: 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

第二章 导数与微分

第一节 导数的概念

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=x(x-1)(x+2)(x-3)...(x+100)$ ，则 $f'(1)=($ $)$.

   A. $101!$

   B. $-\frac{101!}{100}$

   C. $-100!$

   D. $\frac{100!}{99}$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{-x^2}}{x} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$ 则 $f'(0)=($ $)$.

   A. 0

   B. $\frac{1}{2}$

   C. 1

   D. -1

二、填空题

3．设 $f'(x_0)$ 存在，根据导数的定义：

(1) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ ；

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$

4．函数 $y=x^2\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$ 的导数等于

5．曲线 $y=e^x$ 上点(0,1)处的切线方程为

6. 已知某物体的运动规律为 $s=t^3$ (单位: m), 则该物体在 $t=2$ (单位: s) 时的速度为

三、计算题

7. 设函数 $f(x)=10x^2$ ，试按导数的定义求 $f'(-1)$.

8. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程

9. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标分别为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，过这两点作此抛物线的割线。问：该抛物线上哪一点处的切线平行于这条割线?

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{if } x<0\\ x & \text{if } x\geq 0\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

11．讨论函数 $y=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性

第二节 函数的求导法则

一、选择题

1．设在点 x_0 处函数 $f(x)$ 可导， $g(x)$ 不可导，则在点 x_0 处(　　).

A. $f(x)+g(x)$ 必可导

B. $f(x)g(x)$ 必不可导

C. $f(x)-g(x)$ 必不可导

D. $\frac{f(x)}{g(x)}$ 必可导

二、计算题

2．求下列函数的导数：（1）$y=2\tan x+\sec x-1$；

(2) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(3) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$；

(4) $y=x^2\ln x\cos x$.

3．求函数 $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$ 在点 $x=0$ 和点 $x=2$ 处的导数

4．求下列函数的导数：（1）$y=\arctan e^x$

(2) $y=\arcsin^2 x$

(3) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ ；

(4) $y = \ln\tan\left(\frac{x}{2}\right)$;

(5) $y = e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(6) $y = e^{-x}\left(x^2 - 2x + 3\right)$;

(7) $y = x\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2}$.

5．设函数 $f(x)$ 可导，求函数 $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ ．

三、证明题

6．设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) $f(x+y)=f(x)f(y), \forall x, y \in R,$

(2) $f(x)=1+xg(x)$ ，而 $\lim_{x\to 0} g(x)=1$

试证： $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$

第三节 高阶导数

一、选择题

1．若函数 $f(x)=\sin(\frac{x}{2})+\cos 2x$ ， 则 $f^{27}(\pi)=($　　$)$.

A. 0

B. $-\frac{1}{2^{27}}$

C. $2^{27}-\frac{1}{2^{27}}$

D. 2^{27}

二、填空题

2．设函数 $y=(1+x^2)\arctan x$ ，则 $y''=$ ________.

3．若 $f''(x)$ 存在，函数 $y=\ln f(x)$ ，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

三、计算题

4．求下列函数的二阶导数：(1) $y=e^{-t}\sin t$

(2) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5. 设 $f''(x)$ 存在，求函数 $y=f(x^2)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. 求下列函数所指定阶的导数：（1）$y=e^x\cos x$ ，求 y^4

（2）$y=x^2\sin 2x$ ，求 y^{50} .

四、证明题

7. 试从 $d\frac{x}{d}y=\frac{1}{y'}$ 导出：

（1）$d^2\frac{x}{(dy)^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$ ；

(2) 第二问求证：第二阶导数的导数形式

第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率

一、选择题

1．设函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ，则 $y'(1)=($ $)$.

A. 2

B. 8

C. $\frac{1}{2}-\ln 2$

D. $1-\ln 4$

2．已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ 则 L 上点 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程是 ( ).

A. $x+y=\pi$

B. $x-y=\pi-4$

C. $x-y=\pi$

D. $x+y=\pi-4$

二、填空题

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\sin y+ye^{x}=0$ 所确定，则 $y'(0)=$ __________.

4．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=a\cos^{3}\varphi \\ y=a\sin^{3}\varphi \end{cases}$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$ __________.

三、计算题

5．求由方程 $xy=e^{x+y}$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

6. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程

7. 求由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

8. 用对数求导法求函数 $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ 的导数

9. 求由参数方程 $\begin{cases}x=at^2\\y=bt^3\end{cases}$ 所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

10. 已知一曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 求该曲线在点 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程

11. 求由下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

(1) $\begin{cases} x=3e^{-t} \\ y=2e^{t} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

12. 以 4 m³/min 的速率向深 8 m、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中注水，当水深为 5 m 时，水面上升的速率为多少？

第五节 函数的微分

一、选择题

1. 一切初等函数在其定义区间内（　　）.

A. 可微

B. 不可微

C. 连续

D. 有界

二、填空题

2. 已知函数 $y = x^2 - x$ ，则在点 $x = 2$ 处，当 $\Delta x = 0.1$ 时， $\Delta y =$ __________， $dy =$ __________.

3. $d(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}) =$ __________ dx .

4. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是可导函数，又函数 $y=f[g(2-x^3)]$ ，则当 $\Delta x\to 0$ 时，无穷小 Δy 关于 Δx 的线性主部为 __________.

三、计算题

5. 求下列函数的微分:

(1) $y=x^2e^{2x}$;

(2) $y=\ln^2(1-x)$;

(3) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(4) $y=\tan^2(1+2x^2)$.

6. 已知 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零, 求 y 对 x 的微分.

7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2f(x)+xf(y)=x^2$ 所确定, 其中 $f(x)$ 是 x 的可微函数, 试求 dy .

8. 计算 $\sqrt[3]{996}$ 的近似值

总习题二

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$ ，其中函数 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，则必有 (　　).

   A. $f'(x)=\varphi(x)$

   B. $f'(x)=\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)$

   C. $f'(a)=\varphi(a)$

   D. $f'(a)=\varphi'(a)$

2. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ ，则当 $\Delta x\to 0$ 时该函数在点 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 Δx 的 (　　).

   A. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

   B. 等价无穷小

   C. 低阶无穷小

   D. 高阶无穷小

二、填空题

3．设函数 $s=e^{-t}\cos 3t+\sin 1$ ，则 $\frac{ds}{dt}=$ ________

4．设函数 $y=2^{\ln\tan x}$ ，则 $dy=$ ________

5．设函数 $y=\frac{x}{1-2\sin x}-\ln(4-x)$ ，则 $y'\mid_{x=\pi}=$ ________

6．曲线 $y=2x^3-5x^2+4x-5$ 上点 $(2,-1)$ 处的法线方程是 ________

7．设 $f(x)$ 是可导函数， Δx 是自变量在点 x 处的增量，则有 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^2(x+\Delta x)-f^2(x)}{\Delta x}=$ __________

三、计算题

8．讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性

9．求函数 $y=\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的导数

10．求函数 $y=\cos^2 x\ln x$ 的二阶导数

11．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定，求 $y''(0)$ ．

12．求由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ ．

第三章 微分中值定理与导数的应用

第一节 微分中值定理

一、选择题

1. 设函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上满足罗尔中值定理的条件，则罗尔中值定理结论中的 $\xi =$ (　　).

   A. π

   B. $\frac{\pi}{2}$

   C. $\frac{\pi}{3}$

   D. $\frac{\pi}{4}$

2. 下列函数中在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的是 (　　).

   A. $\ln x$

   B. $\ln \ln x$

   C. $\frac{1}{\ln} x$

   D. $\ln(2 - x)$

二、填空题

3．设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$ ，则 $f'(x)=0$ 有 __________ 个实根，分别位于区间 __________ 中。

三、证明题

4．证明恒等式: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\le x\le 1)$.

5．若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ ，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$ ，证明：在区间 (x_1,x_3) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f''(\xi)=0$.

6．设 $a>b>0$ ，证明： $\frac{a-b}{a}<\ln\left(\frac{a}{b}\right)<\frac{a-b}{b}$

第二节 洛必达法则

一、选择题

1. 下列式子中运用洛必达法则正确的是（　　）

A. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)}=1$

B. $\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$

C. $\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x}$ 不存在

D. $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}=1$

2. 下列式子中，极限存在但不能用洛必达法则计算的是（　　）

A. $\lim_{x\to0}x^2(\sin x)$

B. $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

C. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

D. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$

二、填空题

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos5x}{\cos3x}=$ ____________

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan x} =$ ____________

三、计算题

5. 用洛必达法则计算下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin} x$;

(2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$;

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$;

(4) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$;

(5) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$;

(6) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

(7) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\tan\left(\pi\frac{x}{2}\right)$;

(8) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

第三节 泰勒公式

一、选择题

1. 已知 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x)$，则 $R_3(x) = ($　　$)$.

A. $\frac{\sin\xi}{3!}x^3$

B. $-\frac{\sin\xi}{3!}x^3$

C. $\frac{\cos\xi}{4!}x^4$

D. $-\frac{\cos\xi}{4!}x^4$

2. 函数 $f(x)$ 的泰勒展开式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + R_{n(x)}$ 中拉格朗日余项 $R_{n(x)} = ($　　$)$.

A. $f^{n+1}\frac{\theta x}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$

B. $f^{n+1}\frac{x_0+\theta x}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$

C. $f^{n+1}\frac{x_0+\theta(x-x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n}\ (0<\theta<1)$

D. $f^{n+1}\frac{x_0+\theta(x-x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$

二、计算题

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的三阶泰勒公式

4. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

5. 求函数 $f(x)=xe^{x}$ 带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式

6. 应用三阶泰勒公式求 $\sqrt[3]{30}$ 的近似值，并估计误差

7. (附加题)利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

(2) $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、选择题

1. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x) > g'(x)$ ，则在 (a,b) 内有（　　）.

A. $f(x) - g(x) > 0$

B. $f(x) - g(x) \geq 0$

C. $f(x) - g(x) > f(b) - g(b)$

D. $f(x) - g(x) > f(a) - g(a)$

2. 设函数 $f(x) = |x(1-x)|$ ，则（　　）.

A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

B. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点， $(0,0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

3. 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数是（　　）.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

二、填空题

4. 函数 $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$ 的单调增加区间是 ________

5. 曲线 $y=xe^{-x}$ 的凹区间是 ________

6. 设点(1,3)为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，则 $a=$ ________， $b=$ ________

三、计算题

7．判定函数 $f(x)=x+\cos x$ 的单调性

8．求下列函数的单调区间:

(1) $y=2x^3-6x^2-18x-7$；

(2) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ ($a>0$).

9．求下列函数曲线的拐点及凹凸区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$；

(2) $y=\ln(x^2+1)$.

10. 试确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a,b,c,d ，使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线，$(1,-10)$ 为其拐点，且点 $(-2,44)$ 在曲线上.

四、证明题

11. 证明下列不等式:

(1) 当 $x>0$ 时，$1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x}$;

(2) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$.

第五节 函数的极值与最大值最小值

这节什么都没有～

第六节 函数图形的描绘

一、选择题

1. 已知函数 $f(x) = x^4 + ax^2 + bx$ 在点 $x = 1$ 处有极值 -2，则常数 a, b 的值为（　　）.

   A. $a = -2, b = 1$

   B. $a = 1, b = -1$

   C. $a = 0, b = -3$

   D. $a = -1, b = -2$

2. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续且取得极大值，则（　　）.

   A. $f'(x_0) = 0$

   B. $f''(x_0) < 0$

   C. $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

   D. $f'(x_0) = 0$ 或不存在

3. 已知 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-1$ ，则在点 $x=a$ 处（　　）.

A. 函数 $f(x)$ 的导数存在且 $f'(a)\neq 0$

B. 函数 $f(x)$ 取得极小值

C. 函数 $f(x)$ 取得极大值

D. 函数 $f(x)$ 的导数不存在

4. 曲线 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的渐近线有（　　）.

A. 2 条

B. 3 条

C. 4 条

D. 5 条

二、填空题

5. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ ，其极大值为 __________，极小值为 __________.

6. 已知函数 $y = x + \sqrt{1-x}$ ，在区间 $[-5,1]$ 上，它的最大值为 __________，最小值为 __________.

三、计算题

7. 求下列函数的极值:

(1) $y = x - \ln(1+x)$;

(2) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

8. 问：函数 $y = x^2 - \frac{54}{x}(x < 0)$ 在何处取得最小值?

9. 描绘下列函数的图形:

(1) $y=\frac{1}{5}(x^4-6x^2+8x+7)$;

(2) $y=x^2+\frac{1}{x}$.

四、应用题

10. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问: 底半径 r 和高 h 各等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

11. 一房产公司有 50 套公寓要出租。当月租金定为 4000 元时, 公寓可以全部租出去, 月租金每增加 200 元, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费。试问: 月租金定为多少时可获得最大收入?

第七节 曲率

一、填空题

1. 曲线 $y = x^2 + e^{x^2}$ 在点(0,1)处的曲率为 ________，曲率半径为 ________。

2. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 4$ 在其顶点处的曲率为 ________，曲率半径为 ________

二、计算题

3. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点(0,2)处的曲率

4. 求曲线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 在点 $t=t_0$ 处的曲率

三、应用题

5. 一飞机沿抛物路径 $y=\frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上，单位: m) 做俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机速度为 $v=200\frac{m}{s}$. 飞行员体重 $G=70kg$. 求飞机俯冲至最低点即坐标原点 O 处时座椅对飞行员的作用力.

总习题三

一、选择题

1. 设在区间 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$ ，则下列判断正确的是(　　).

   A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

   B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

   C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

   D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

2. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$ ， 则(　　).

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

二、填空题

3. 函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔中值定理的 ξ 值是 __________

4. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=$ __________

5.曲线 $y=xe^{-x}$ 的拐点是 $(2,2e^{-2})$，凸区间是 $(-\infty,2)$，凹区间是 __________

6. 函数 $f(x)=8\ln x-x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最大值是 __________

7. 曲线 $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$ 的渐近线为 __________

8.抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率为 __________

三、计算题

9. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

(2) $\lim_{x\to +\infty}\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\arctan x\right)^x$.

10. 求下列函数在指定点处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x)=\arctan x, x_0=0, n=3$ ，佩亚诺余项;

(2) $f(x)=x^3\ln x, x_0=1, n=4$ ，拉格朗日余项

11. 设 $a>1$ ，函数 $f(x)=a^x-ax$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的驻点为 $x(a)$. 问： a 为何值时， $x(a)$ 最小？并求出最小值.

12. 曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

13. 试确定常数 a,b ，使得 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的五阶无穷小。

四、证明题

14. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+...+\frac{a_n}{n+1}=0$ ，证明：多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

在区间(0,1)内至少有一个零点.

15．证明：当 $e<a<b<e^2$ 时， $\ln^2 b-\ln^2 a>\left(\frac{4}{e^2}\right)(b-a)$.

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1．有界函数一定存在原函数. (　　).

2．设函数 $f(x)$ 的原函数存在， k 为任意常数，则 $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.(　　)

3．设 $F'(x)=f(x)$ ，则 $\left[\int \mathrm{d}F(x)\right]' = f(x)+C$. (　　).

二、计算题

4. 计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = -2x^{-\frac{3}{2}} + C$

(2) $\int x^2\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{7}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C$;

(3) $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x = \sin x - \cos x + C$;

(4) $\int \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$;

(5) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int(\sec^2 x - \csc^2 x)\,\mathrm{d}x = \tan x + \cot x + C$;

(6) $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{3^x}\,\mathrm{d}x = \int\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\right]\mathrm{d}x = -3\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - 2x + C$.

5. 一曲线过点 $(e^2, 3)$ ，且该曲线在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

6. 已知函数 $F(x)$ 的导函数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，且当 $x=1$ 时函数值为 $\frac{3\pi}{2}$ ，试求此函数。

三、证明题

7. 证明: $\arcsin(2x-1)$ ，$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

第二节 换元积分法(1)

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1. 因 $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$ ，故 $\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\sin 2x+C$. (　　)

2. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ ，则 $\int f(u)\,\mathrm{d}x=F(u)+C$. (　　)

二、填空题

3. 将合适的函数填入下列空格中:

(1) ________ dif x = dif(a x + b) ;

(2) dif ________ = x dif x;

(3) dif ________ = (1/x) dif x;

(4) dif ___________ = cos x dif x ;

(5) dif ___________ = sin x dif x ;

(6) dif ___________ = *e*^(2x) dif x ;

(7) dif ___________ = 1/sqrt(x) dif x ;

(8) dif ___________ = 1/x^2 dif x .

三、计算题

4. 计算下列不定积分：(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3x-2)^2}$;

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{3x^3}{1-x^4}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln\ln x}$;

(5) $\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$;

(7) $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$.

5.(附加题)计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{x}{x^2+2x+2} \, \mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \, \mathrm{d}x$.

第二节 换元积分法(2)

一、填空题

1．如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，可做代换将根式化去，此时 $\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿＿＿，其中 $x=a\sin t$

2．如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，可做代换将根式化去，此时 $\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿＿＿，或 $a\cosh t\,\mathrm{d}t$

3．如果被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，可做代换将根式化去，此时 $\mathrm{d}x=$ ＿＿＿＿＿＿，或 $a\sinh t\,\mathrm{d}t$

二、计算题

4．计算下列不定积分：(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$;

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$;

(7) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$。

5.(附加题)计算下列不定积分： (1) $\int \frac{x^3+1}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{100}+x}$。

第三节 分部积分法

一、简答题

1. 写出不定积分的分部积分公式及其推导过程(作业讲评时随机点名答辩).

二、计算题

2．计算下列不定积分：

(1) $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x\cos\left(\frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int x^3\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int \arcsin^2 x \,\mathrm{d}x$;

(6) $\int \cos\ln x \,\mathrm{d}x$;

(7) $\int e^{\sqrt{3x+9}} \,\mathrm{d}x$.

3. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$ ，求 $\int x f'(x) \,\mathrm{d}x$.

4.(附加题)综合所学积分方法，计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\ln(2+\sqrt{x})}{x+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

第四节 有理函数的积分

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1.有理函数也称为有理分式，整式也是有理分式的一种（　　）

2.有理分式 $\frac{x^3+x^2-x-1}{2x^3+3x^2+6x}$ 是真分式（　　）

3. 令 $t=\tan(\frac{x}{2})$ ，则 $\int\frac{\tan x}{\sin x+\cos x-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{A}{(1-t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$ 中 $A=-2$ (　　)

4. 在计算三角函数有理式的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$ 时，一般使用变换 $t=\tan(\frac{x}{2})$ (　　)

5.所有连续函数均存在初等函数的原函数 (　　)

二、计算题

6. 计算下列不定积分:

(1) $\int\frac{x^3}{x+3}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} \, \mathrm{d}x;$

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} \, \mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$;

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$.

7.(附加题)试用两种方法计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$

总习题四

一、选择题

1. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，则在 (a,b) 内 $f(x)$ (　　).

A. 必有导函数

B. 必有原函数

C. 必有界

D. 必有极限

2. 若 $F'(x)=f(x),\varphi'(x)=f(x)$ ，则 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=($ $)$.

A. $F(x)$

B. $\varphi(x)$

C. $\varphi(x)+C$

D. $F(x)+\varphi(x)+C$

3.下列式子中正确的是( )

A. $d[\int f(x)\,\mathrm{d}x]=f(x)$

B. $\frac{\mathrm{d}[\int f(x)\,\mathrm{d}x]}{dx}=f(x)\,\mathrm{d}x$

C. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$

D. $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$

4. 设函数 $f(x)=e^{-x}$ ，则 $\int \frac{f(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x=($ $)$.

A. $\frac{1}{x}+C$

B. $\ln x+C$

C. $-\frac{1}{x}+C$

D. $-\ln x+C$

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=(\quad)$

A. $\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}+C$

B. $\arcsin\sqrt{x}+C$

C. $2\arcsin(2x-1)+C$

D. $\arcsin(2x-1)+C$

二、填空题

6. $\int(1-\sin^2(\frac{x}{2}))\,\mathrm{d}x=$ __________

7．若 e^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x =$ __________ .

8．设 $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x =$ __________.

9．设 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，则 $\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} =$ __________ .

10．若 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ __________.

三、计算题

11．计算下列不定积分:

(1) $\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt[4]{\tan x}}$;

(4) $\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

12．设函数 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$ ，求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

13．已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$ ，求 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x$.

第五章 定积分

第一节 定积分的概念与性质

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1. $\frac{d\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{dx}=f(x)$ (　　)

2. 定积分的定义中，“ $\lambda\to 0$ ”可以换成“ $n\to\infty$ ”. (　　)

3.交换定积分的上下限，定积分的值不变. (　　)

4.若等式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 成立，则必有 $a<c<b$. (　　)

二、计算题

5. 设 $\int_{-1}^1 3f(x)\,\mathrm{d}x=18,\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x=4,\int_{-1}^3 g(x)\,\mathrm{d}x=3$ ，求:

(1) $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{18}{3}=6$;

(2) $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=4-6=-2$;

(3) $\int_3^{-1} g(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{-1}^3 g(x)\,\mathrm{d}x=-3$;

(4) $\int_{-1}^3\left(\frac{1}{5}\right)[4f(x)+3g(x)]\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{5}\right)[4\times 4+3\times 3]=\frac{25}{5}=5$.

6. 利用定积分的几何意义，求下列定积分的值(要求作图):

(1) $\int_0^t(2x+1)\,\mathrm{d}x=t^2+t$;

(2) $\int_{-1}^2|x-1|\,\mathrm{d}x=\frac{(1-(-1))^2}{2}+\frac{(2-1)^2}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$;

(3) $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi\times 3^2}{2}=9\frac{\pi}{2}$ (半圆面积).

7. 估计下列定积分的值:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{5\frac{\pi}{4}}(1+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$; 当 $x\in[\frac{\pi}{4},5\frac{\pi}{4}]$ 时，$1\le 1+\sin^2 x\le 2$，所以 $\pi\le I\le 2\pi$

(2) $\int_2^0 e^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$. 这是负积分，$=-\int_0^2 e^{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

8. (附加题)利用定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x$.

三、证明题

9. (附加题)我们知道，当 $a>0$ 时， $ax^2+bx+c\geq 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow b^2-4ac\leq 0$. 试用此结论证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geq\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

第二节 微积分基本公式

一、计算题

1.计算下列导数：(1) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(2) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$;

(3) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$;

(3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x \arctan^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$;

(2) $\int_{-1}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ，其中 $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{if } x\le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{if } x>1 \end{cases}$

(5) $\int_0^2 \max\{x^2, x^3\}\,\mathrm{d}x$.

4. 设函数 $y=f(x)$ 具有三阶连续导数，其部分图形如图 5-1 所示，试确定下列定积分的符号:

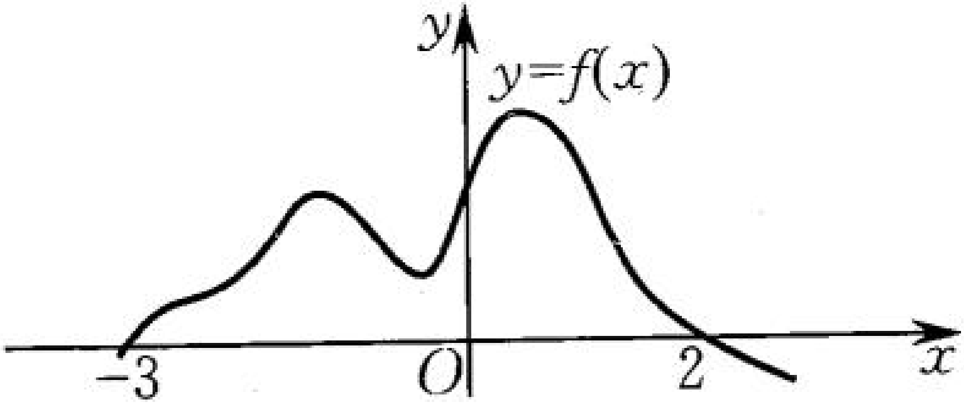

Figure 2: 图 5-1

(1) $\int_{-3}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-3}^{2} f'(x)\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-3}^{2} f''(x)\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_{-3}^{2} f'''(x)\,\mathrm{d}x$.

第三节 定积分的换元积分法和分部积分法

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1. $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(11+5x)^3} \overset{[u=11+5x]}{=} \frac{1}{5}\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}u}{u^3} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}u^{-2}\ \Big|_{1}^{2}\right) = \frac{3}{40}$ (　　)

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ ，由于 $x^2\sin x$ 是奇函数，因此有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x = 0 \quad (\qquad)$$

二、计算题

3. 计算下列定积分：（1）$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x;$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cos 2x\,\mathrm{d}x;$

(3) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}};$

(4) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(5) $\int_1^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

4．设函数 $f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$ ，求 $f(x)$ ．

5.(附加题)设函数 $f(x)=\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ，求 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

第四节 反常积分

一、判断题(如果错误，请加以改正)

1．已知 $\sin x$ 是奇函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x=0$（　　）

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \sin x \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} (-\cos b + \cos b) = 0$ (　　)

3. $\int_{-2}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \,\Big|_{-2}^{3} = \ln 3 - \ln 2.$ (　　)

二、计算题

4. 判定下列反常积分的敛散性，若收敛，计算反常积分的值:

(1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$;

(3) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

5. 当 k 为何值时，反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln^k x}$ 收敛？当 k 为何值时，该反常积分发散？又当 k 为何值时，该反常积分取得最小值？

6.(附加题)证明：若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ ，恒有

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x),\quad \frac{d}{dx}\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

总习题五

一、选择题

1. 设 $I=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ，根据定积分的几何意义可知(　　)

A. I 是由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b$ 与 x 轴所围成图形的面积，所以 $I>0$

B. 若 $I=0$ ，则上述图形面积为零，从而图形的“高” $f(x)=0$

C. I 是曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b$ 与 x 轴之间各部分面积的代数和

D. I 是由曲线 $y=|f(x)|$ 及直线 $x=a, x=b$ 与 x 轴所围成图形的面积

2. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的(　　)

A. 必要条件

B. 充分条件

C. 充要条件

D. 无关条件

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x & \text{if } x\geq 0 \\ e^x & \text{if } x<0 \end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=$ (　　)

A. $3-e^{-1}$

B. $3+e^{-1}$

C. $3-e$

D. $3+e$

4. 设函数 $f(x)$ 连续， $x>0$ ，且 $\int_{1}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t=x^2(x-1)$ ，则 $f(2)=$ (　　)

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

B. $2\sqrt{2}-12$

C. $12-2\sqrt{2}$

D. $1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t}{x^2} & \text{if } x\neq 0\\ a & \text{if } x=0\end{cases}$ 且已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则必有 (　　)

A. $a=1$

B. $a=2$

C. $a=0$

D. $a=-1$

二、填空题

6. $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^b \arctan x\,\mathrm{d}x=$ __________

7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=$ __________

8. 由区间 $[a,b]$ 上连续曲线 $y=f(x)$ ，直线 $x=a, x=b(a<b)$ 和 x 轴所围成图形的面积为 $S=$ __________.

9. $\int_{-1}^{0}|3x+1|\,\mathrm{d}x=$ __________

10. 已知 xe^x 为函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=$ __________

三、计算题

11. 计算下列定积分:

(1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 2t\cos t\,\mathrm{d}t}{1-\cos x}$;

(3) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^2 x\log_2 x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^e \sin\ln x\,\mathrm{d}x$.

四、证明题

12. 设 $f''(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明:

$$\int_a^b xf''(x)\,\mathrm{d}x = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)]$$

第六章 定积分的应用

第一节 定积分的元素法

这节什么都没有～

第二节 定积分在几何学上的应用

一、填空题

1. 能用定积分表示的量具有如下特征：

   (1) ____________

   (2) ____________

   (3) ____________

2. 若要求由曲线 $y=x^3$ 和 $y=x^2+2x$ 所围成图形的面积，则其面积元素为 ____________，面积的表达式为 ____________.

3. 若要求底面半径为 R，高为 H 的圆锥的体积，可建立以底面圆心 O 为坐标原点，高为 x 轴的坐标系，则其体积元素为 ____________，体积的表达式为 ____________。

二、计算题

4. 求由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $x=2$ 所围成图形的面积

5. 求由曲线 $y=e^x$ 及 $y=e^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围成图形的面积

6. 求由抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成图形的面积

7. 求由摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi)$ 的一拱与 x 轴所围成图形的面积

8. 由曲线 $y = x^3$ 与直线 $x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周，计算所得两个旋转体的体积.

9. 由曲线 $y = x^2$ 及 $y^2 = x$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周，计算所得旋转体的体积

10. 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

11. (附加题) 由圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周, 计算所得旋转体的体积.

第三节 定积分在物理学上的应用

一、填空题

1. 设 x 轴上有一长度为 l , 线密度为常数 μ 的细棒, 在与细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M (见图 6-1). 已知万有引力常数为 G , 则质点 M 与细棒之间的引力大小为 ________

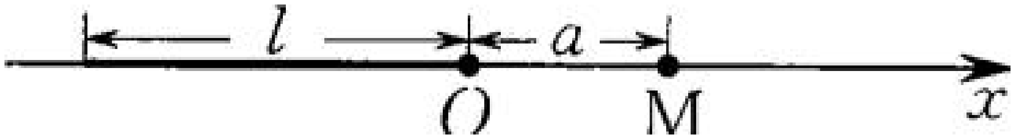

Figure 3: 图 6-1

二、应用题

2．试根据胡克定律，计算弹簧由原长拉伸 6 cm 所需要做的功(已知弹簧的劲度系数以 N/m 为单位时数值为 k)

3．一物体按规律 $x = ct^3$ 做直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比，计算该物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时，克服介质阻力所做的功。

4．有一圆锥形贮水池(上大下小)，深 15 m，口径 20 m，盛满水，现用泵将水吸尽，需做多少功?

5．有一等腰梯形闸门, 它的两条底边分别长 10 m 和 6 m, 高为 20 m, 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

6. 一底为 8 cm, 高为 6 cm 的等腰三角形铅直地浸没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3 cm, 试求它每面所受的水压力.

7.(附加题)半径为 r 的球沉入水中，球的上部与水面相切，球的密度 ρ 与水相同，现将球从水中取出，需做多少功?

总习题六

一、选择题

1. 由曲线 $y=e^x$ 和直线 $x=0$ 及 $y=2$ 所围成的曲边梯形的面积为(　　).

   A. $\int_1^2 \ln y, \mathrm{d}y$

   B. $\int_0^{e^2} e^x, \mathrm{d}y$

   C. $\int_1^{\ln 2} \ln y, \mathrm{d}y$

   D. $\int_1^2 (2-e^x)\,\mathrm{d}x$

2.如图 6-2 所示，阴影部分面积为(　　)

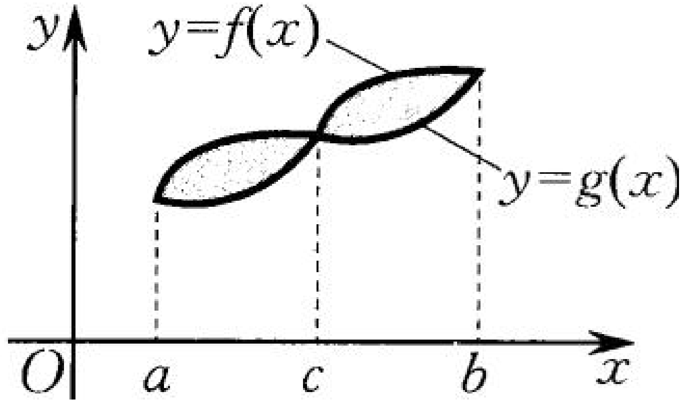

Figure 4: 图 6-2

A. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

B. $\int_a^c [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x + \int_c^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

C. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

D. $\int_a^c [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x + \int_c^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x$

二、填空题

3.由抛物线 $y=x^2+2x$ ，直线 $x=1$ 和 x 轴所围成图形的面积为 ________

4. 曲线 $y=\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ 相应于区间[1,3]上的一段弧的长度为 ________

5. 由曲线 $y=\sin x$ 和它在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线以及直线 $x=\pi$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 ________

6. 水下有一个宽 2 m，高 3 m 的矩形闸门铅直地浸没在水中, 水面超过门顶 2 m，则闸门上所受的水压力为 ________

7. 连续函数 $y=f(x,m)$ 对于任意常数 m 恒大于零，则由曲线 $y=f(x,m)$ 及直线 $x=a$ ， $x=b$ ， $y=0$ 所围成图形的面积为 ________.

三、计算题

8. 求 C 的值 $(0 < C \leq 1)$，使得由两曲线 $y = x^2$ 与 $y = Cx^3$ 所围成图形的面积为 $\frac{2}{3}$.

9. 求 a 的值，使得由曲线 $y = a(1 - x^2)(a > 0)$ 与它在点 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$ 处的法线所围成图形的面积最小.

10. 有一立体以由抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $x = 2$ 所围成的图形为底，而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形，求其体积。

第七章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念

这节什么都没有~

第二节 可分离变量的微分方程

一、选择题

1. 关于微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2+2\frac{dy}{dx}+y=e^x}$ 的下列结论：① 该方程是齐次微分方程，② 该方程是线性微分方程，③ 该方程是常系数微分方程，④ 该方程为二阶微分方程，其中正确的是(　　).

   A. ①②③

   B. ①②④

   C. ①③④

   D. ②③④

2.下列方程中(　　)是一阶微分方程

A. $(y-xy')^2=x^2y''$

B. $(y'')^2+5(y')^4-y^5+x^7=0$

C. $(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$

D. $xy''+y'+y=0$

二、填空题

3. $xy'' + 2x^2(y')^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是 ________ 阶微分方程

4. 微分方程 $y' = 2\frac{y}{x}$ 的通解为 ________

三、计算题

5. 确定函数 $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ 中所含的参数，使得该函数满足初值条件 $\begin{cases} y\,|_{x=0} = 0 \\ y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$

6. 写出在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标平方的曲线所满足的微分方程

7. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy' - y\ln y = 0$；

(2) $(e^{x+y}-e^{x})\,\mathrm{d}x+(e^{x+y}+e^{y})\,\mathrm{d}y=0$.

8. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $\cos x\sin y\,\mathrm{d}y=\cos y\sin x\,\mathrm{d}x, y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$

(2) $y'\sin x=y\ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$

9. 一曲线通过点 $(2,3)$，且它在两坐标轴间的任一切线均被切点所平分，求该曲线方程

四、应用题

10. 一个半球体形状的雪堆，其体积融化率与半球体面积 A 成正比，比例系数 $k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体形状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 $3h$ 内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$ ，问：雪堆全部融化需要多少时间？

五、证明题

11. 验证：$x^2-xy+y^2=C$ 所确定的函数为微分方程 $(x-2y)y'=2x-y$ 的解.

第三节 齐次方程

一、选择题

1. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\left(\frac{y}{x}\right)$ 的通解为(　　).

   A. $\sin\left(\frac{y}{x}\right)=Cx$

   B. $\sin\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{Cx}$

   C. $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=Cx$

D. $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{Cx}$

二、计算题

2. 求下列齐次方程的通解:

(1) $x\frac{dy}{dx}=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$;

(2) $\left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x-3xy^2\,\mathrm{d}y=0$。

3. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解:

(1) $\left(y^2-3x^2\right)\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}x=0, y|_{x=0}=1;$

(2) $\left(x^2+2xy-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(y^2+2xy-x^2\right)\mathrm{d}y=0, y|_{x=1}=1$。

第四节 一阶线性微分方程

一、判断题

1. $y'=\sin y$ 是一阶线性微分方程（　　）

2. $y'=x^3y^3+xy$ 不是一阶线性微分方程（　　）

二、选择题

3. 以下(　　)是一阶线性微分方程

A. $y' = \sec y$

B. $yy' = 1$

C. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

D. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+x^3+y}{1+x}$

三、计算题

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$;

(2) $(y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$。

5．求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\sin\frac{x}{x}, y|_{x=\pi}=1$

(2) $\frac{dy}{dx}+3y=8, y|_{x=0}=2$

6．求一曲线方程，该曲线通过坐标原点，且它在点 (x,y) 处的切线的斜率等于 $2x+y$

7．用适当的变量代换将下列微分方程化为可分离变量的微分方程，然后求其通解：

(1) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$；

(2) $y(xy+1)\,\mathrm{d}x + x(1+xy+x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0$。

第五节 可降阶的高阶微分方程

一、填空题

1. 微分方程 $y'' = \sin 2x - \cos x$ 的通解是 ___________
2. 微分方程 $y'' = e^{2x}$ 的通解是 ___________

二、计算题

3. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$

(2) $yy'' + 2(y')^2 = 0$。

4. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y'' = e^{2y}, y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

(2) $y'' + (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$。

三、应用题

5. 设有一质量为 m 的物体在空中由静止开始下落。如果空气阻力 $R = cv$ (c 为常数， v 为物体运动的速度)，试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系。

第六节 高阶线性微分方程

这节什么都没有～

第七节 常系数齐次线性微分方程

一、选择题

1. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解， C_1, C_2, C_3 是任意常数，则该微分方程的通解是 (　　).

   A. $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$

   B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$

   C. $(1 + C_1 + C_2)y_1 + C_1y_2 + C_2y_3$

   D. $(1 + C_1 + C_2)y_1 - C_1y_2 - C_2y_3$

二、填空题

2. 设 $y_1 = \cos x$ 与 $y_2 = \sin x$ 是微分方程 $y'' + y = 0$ 的两个解，则该微分方程的通解为 __________

3. 微分方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的通解为 __________

4. 已知 $y = e^x$ 与 $y = e^2x$ 是某二阶常系数齐次线性微分方程的两个解，则该微分方程为 __________

三、计算题

5. 求下列微分方程的通解:

   (1) $y'' + y' - 2y = 0$

   (2) $y'' - 4y' + 5y = 0.$

6. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y'' - 3y' - 4y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5$;

(2) $y'' - 4y' + 13y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 3$.

四、应用题

7. 设圆柱形浮筒的底面直径为 0.5 m, 将它铅直地放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s, 求浮筒的质量.

五、证明题

8. 验证: $y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是微分方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解.

9. 验证: $y=\frac{1}{x}(C_1e^x+C_2e^{-x})+\frac{e^x}{2}(C_1, C_2$ 是任意常数)是微分方程 $xy''+2y'-xy=e^x$ 的通解.

第八节 常系数非齐次线性微分方程

一、选择题

1. 微分方程 $y''-y=3e^x+2$ 的一个特解具有形式 $(a, b$ 为常数)(　　).

A. $y^*=ae^x+b$

B. $y^*=ae^x+bx$

C. $y^*=axe^x+b$

D. $y^*=axe^x+bx$

2. 微分方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特解具有形式(　　).

A. $y^*=a\sin x$

B. $y^*=a\cos x$

C. $y^*=x(a\sin x+b\cos x)$

D. $y^*=a\cos x+b\sin x$

二、计算题

3．求下列微分方程的通解：

(1) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$;

(2) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$

4．求下列微分方程满足所给初值条件的特解：

(1) $y'' - 3y' + 2y = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$;

(2) $y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, y|_{x=0} = \frac{6}{7}, y'|_{x=0} = \frac{33}{7}$.

三、应用题

5．大炮以仰角 α ，初速度 v_0 发射炮弹，若不计空气阻力，求弹道曲线

总习题七

一、选择题

1．设非齐次线性微分方程 $y''+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ ，C 为任意常数，则该微分方程的通解是(　　).

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$

B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$

D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

2．具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是(　　)

A. $y'''-y''-y'+y=0$

B. $y'''+y''-y'-y=0$

C. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

D. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

二、填空题

3. 已知 $y = 1, y = x, y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该微分方程的通解为

三、计算题

4. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy' \ln x + y = ax(\ln x + 1)$ ；

(2) $y'' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)$

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3 \, \mathrm{d}x + 2(x^2 - xy^2) \, \mathrm{d}y = 0, y|_{x=1} = 1$;

(2) $y'' + y' - 2y = e^x, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2.$

6. 已知某曲线通过点 $(1,1)$，且该曲线上任意一点处的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标，求该曲线方程

高等数学(上册)期末测试模拟卷(一)

一、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，下列(　　)是 x 的同阶(不等价)无穷小。

   A. $\sin x - x$

   B. $\ln(1-x)$

   C. $x^2 \sin x$

   D. $e^x - 1$

2.下列命题中不正确的是(　　)

A. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必不可导

B. 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续

C. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处必可微

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必连续

3. 设函数 $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{3+2e^{\frac{1}{x}}}$ ，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

   A. 跳跃间断点

B. 可去间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

4.下列不定积分的计算不正确的是(　　)

A. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{2}) + C$

B. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2} = \arctan(x-1) + C$

C. $\int 2^x \cdot 3^x \,\mathrm{d}x = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 2 + \ln 3} + C$

D. $\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

5.下列反常积分收敛的是(　　)

A. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\texttt{sqrt } x}$

B. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$

C. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

D. $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)} & \text{if } -1<x<0\\ a\sec x+1 & \text{if } x\geq 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ __________.

7. 已知参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx}=$

8. 函数 $f(x)=xe^x$ 的带有拉格朗日余项的三阶麦克劳林公式为

9. 曲线 $y=4x-x^2$ 在其顶点处的曲率 $k=$

10. $\int_{-2}^{2} \frac{x|\sin x|\ +4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x =$ ________

11. 微分方程 $\frac{dy}{dx}=(1+y^2)e^x$ 的通解为

三、计算题(12～15 题每小题 7 分，16～17 题每小题 8 分，共 44 分)

12. 求 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x \arctan^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$.

13. 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 所确定，求 $y''(1)$.

14. 求 $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

15. 求 $\int_0^\pi x^2\ |\cos x|\,\mathrm{d}x$.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2 & \text{if } x<0\\ e^{-x} & \text{if } x\geq 0\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

17. 求曲线 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点

四、应用题(每小题 9 分，共 18 分)

18. 要做一个容积为 2π 的密闭圆柱形罐头筒，问：半径和高分别为多少时能使所用材料最省？

19. 求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积，并求此图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题(5 分)

20. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ ，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$ ，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ ，使得 $f''(\xi)=0$.

高等数学(上册)期末测试模拟卷(二)

一、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 当 $x \to 0$ 时，下列是 x 的三阶无穷小 (　　).

   A. $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$

   B. $\sqrt{a + x^3} - \sqrt{a}$ ($a > 0$ 是常数)

   C. $x^3 + 0.0001x^2$

   D. $\sqrt[3]{\tan x}$

2. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ ，且 $f'(0) = 0$ ，则下列选项中正确的是 (　　).

   A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

   B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

   C. (0，$f(0)$) 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

   D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

3. 函数 $f(x) = \sin \frac{x}{x(x-1)(x-\pi)}$ 的无穷间断点的个数为 (　　).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4.下列不定积分的计算不正确的是（　　）.

A. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{2}) + C$

B. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \arctan(x+1) + C$

C. $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

D. $\int 2^x \cdot 3^x \, \mathrm{d}x = \frac{2^x \cdot 3^x}{\ln 2 + \ln 3} + C$

5.下列方程中为一阶线性微分方程（　　）.

A. $y' + xy^2 = e^x$

B. $yy' + xy = e^x$

C. $y' = \cos y + x$

D. $y' = x + y\sin x$

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) + \frac{\sin(ax)}{x} & \text{if } x>0 \\ e^x - 2 & \text{if } x \le 0 \end{cases}$ 要使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a =$ __________.

7. 曲线 $\begin{cases} x = e^t + \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 在点 $t=0$ 处的切线方程为 __________.

8.函数 $f(x) = 2^x$ 的带有拉格朗日余项的三阶麦克劳林公式为 __________

9.曲线 $y = \ln\sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率为 __________

10. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$ __________

11. 微分方程 $(1+y)^2 \frac{dy}{dx}+x^3=0$ 的通解为 __________

三、计算题(12～15 题每小题 7 分，16～17 题每小题 8 分，共 44 分)

12. 求 $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$.

13. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy-2x-1=0$ 所确定，求 $y''(0)$.

14. 求 $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

15. 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & \text{if } x\le 0\\ \ln x & \text{if } x>0\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x$.

17. 求曲线 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸区间及拐点

四、应用题(每小题 9 分，共 18 分)

18. 要造一个长方体无盖蓄水池，其容积为 500 m³，底面为正方形。设底面与四壁所使用材料的单位造价相同，问：底边和高分别为多少时，才能使所用材料费最省？

19. 求由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ ，直线 $x=4$ 及 x 轴所围成图形的面积，并求此图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

五、证明题(5 分)

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ ，证明：必存在 $\xi\in(0,1)$ ，使得 $2f(\xi)=-\xi f'(\xi)$.

高等数学(上册)期末测试真题(一)

一、选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1. 若 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{2x}\right)^x=e^3$ ，则 $k=($　　$)$

   A. $\frac{2}{3}$

   B. 6

   C. $\frac{3}{2}$

   D. 不存在

2. 当 $x\to 0$ 时, $\sin x+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $(1+\cos x)\ln(1+x)$ 的(　　).

   A. 高阶无穷小

   B. 等价无穷小

   C. 同阶无穷小, 但不是等价无穷小

   D. 低阶无穷小

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{2}{\pi}\right)\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{if } x<0\\ (1+x)^x & \text{if } x\geq 0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

   A. 跳跃间断点

B. 可去间断点

C. 连续点

D. 第二类间断点

4.方程 $x^4-4x=1$ 在区间(0,1)内(　　).

A. 无实根

B. 有唯一实根

C. 有两个实根

D. 有三个实根

5. 设 $f'(x)=g(x)$，则 $\frac{d}{dx}f(\sin^2 x)=($　　$)$.

A. $2g(x)\sin x$

B. $g(x)\sin 2x$

C. $g(\sin^2 x)$

D. $g(\sin^2 x)\sin 2x$

6. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0,\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\cos x}=1$ ，则 (　　).

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值， $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

7. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，其部分图形如图 1 所示，试确定下列定积分的符号： (1) $\int_{-3}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-3}^{2}f'(x)\,\mathrm{d}x$;

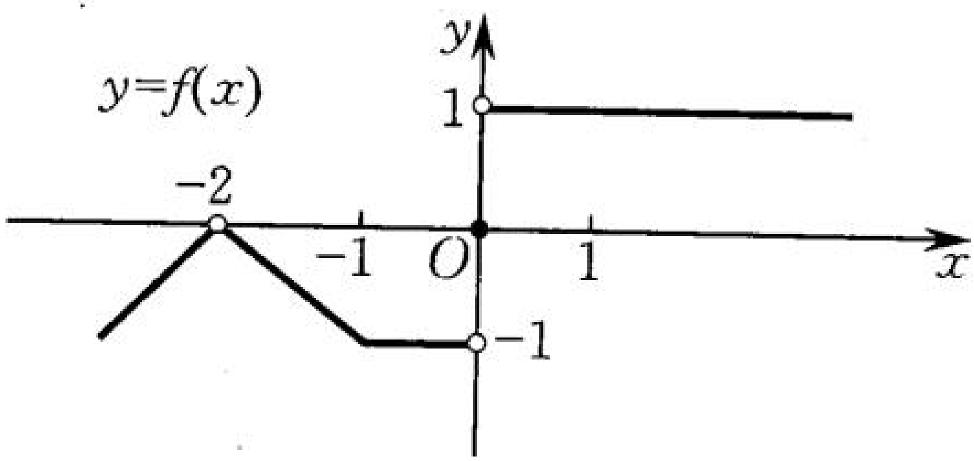

Figure 5: 图 1

(3) $\int_{-3}^{2}f''(x)\,\mathrm{d}x$; (4) $\int_{-3}^{2}f'''(x)\,\mathrm{d}x$.

8. 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解， C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次微分方程的通解是(　　).

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$

B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$

D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

9. 由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=\ln a, y=\ln b(b>a>0)$ 及 y 轴所围成图形的面积为(　　).

A. $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$

B. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

C. $b-a$

D. $a-b$

10. 下列反常积分收敛的是(　　)

A. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, \mathrm{d}x$

B. $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \, \mathrm{d}x$

C. $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

D. $\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

11. 已知 $\lim_{x\to1} f(x)$ 存在，且函数 $f(x)=x^2+2x\lim_{x\to1} f(x)$ ，则 $\lim_{x\to1} f(x)=$ ________

12. 曲线 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t-2 \end{cases}$ 在点 $t=2$ 处的切线方程为 $y=$ __________

13. 设函数 $f(x)=k\tan 2x$ 的一个原函数为 $-\ln\cos 2x$，则 $k=$ __________.

14. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$ __________

15. $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\sin^2 x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=$ __________

16．曲线 $y = x^4(12\ln x - 7)$ 的拐点为 ________

三、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

17．已知连续函数 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) \mathrm{d}t + e^{2x}$ ，求 $f(x)$ ．

18．已知 $f(\pi) = 1$ ，函数 $f(x)$ 二阶连续可微，且 $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \,\mathrm{d}x = 3$ ，求 $f(0)$ ．

19．求微分方程 $y'' - y' = 4xe^x$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

20. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^4-xy-ye^x=1$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

21. 求 $\int_{\sqrt{\frac{2}{x}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

四、应用题(10 分)

22. 如图 2 所示，由抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $x=a,x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_1，由抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $x=a$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形为 D_2，其中 $0<a<2$.

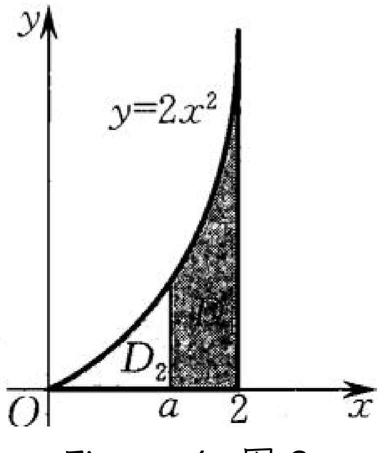

Figure 6: 图 2

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_1；

(2) 试求 D_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V_2 ;

(3) 问: 当 a 为何值时, $V=V_1+V_2$ 取得最大值? 并求出该最大值.

五、选答题(7 分)(考生可从下面 2 个题中任选 1 个作答，多做不多得分)

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f'(x)>0$ ，且极限 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ ，使得

$$\left(\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2*\xi}{f(\xi)}\right)$$

24. 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

高等数学(上册)期末测试真题(二)

一、选择题(每小题 3 分，共 30 分)

1．若 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1(a,b$ 为常数)，则(　　).

A. $a=0,b\in R$

B. $a=0,b=1$

C. $a\in R,b=1$

D. $a\in R,b\in R$

2.当 $x\to\infty$ 时，　$x\cos x$ is(　　)

A. 无穷小

B. 无穷大

C. 有界但不是无穷小

D. 无界但不是无穷大

3．设函数 $y=e^{2x-1}$ ，则 $y^{20}(1)=($　　$)$.

A. $2^{20}e$

B. $2^{20}e^{-1}$

C. 2^{20}

D. e

4.当 $x \to 0$ 时，(　　)是 $x - \sin x$ 的同阶无穷小

A. $x + \tan x$

B. $x \tan x$

C. $x^2 + \tan x$

D. $x^2 \tan x$

5. $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{\ln x}{|} x - 1|$ 的(　　z).

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点

D. 振荡间断点

6. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)<0, \Delta x$ 为自变量在点 x_0 处的增量， Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $\Delta x>0$ ，则(　　).

A. $0<dy<\Delta y$

B. $0<\Delta y<dy$

C. $\Delta y<dy<0$

D. $dy<\Delta y<0$

7. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x} ，则 $f'(x)=($　　$)$.

A. xe^{-x}

B. $(1-x)e^{-x}$

C. $(2+x)e^{-x}$

D. $(-2+x)e^{-x}$

8. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内可导，且 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}=a(a<0)$ ，则(　　).

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. 在点 x_0 的某邻域内 $f(x)$ 单调增加

D. 在点 x_0 的某邻域内 $f(x)$ 单调减少

9. 设函数 $f(x)$ 连续，则 $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right)\int_4^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t =$ (　　).

A. $f(2)$

B. $f(1)$

C. $2f(2)$

D. $2f(1)$

10. 如果连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\ln 2$ ，则 $f(x)=$ (　　).

A. $e^x\ln 2$

B. $e^2x\ln 2$

C. $e^x+\ln 2$

D. $e^2x+\ln 2$

二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

11. $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\ln x}=$ __________

12. 若 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}=6$ ，则 $f'(1)=$ __________

13. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+\sqrt{4-x^2}\bullet\sin x\right)\mathrm{d}x=$ __________

14. 设参数方程 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{2t}-1)\end{cases}$ 函数 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$ ，则 $\frac{dy}{dx|_{t=0}}=$ __________

15. 曲线 $y=-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2$ 在其拐点处的切线方程是 __________

16. 微分方程 $y'=\frac{1}{x+y}$ 的通解为 __________

三、计算题(每小题 7 分，共 35 分)

17. 求 $\lim_{x\to 0^+}(\tan 3x)^{\frac{1}{2\ln x}}$.

18. 求 $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,\mathrm{d}x$.

19. 求微分方程 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^{x}$ 的通解

20. 求 $\int_{0}^{+\infty} x^{2}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

21. 求函数 $f(x) = (2x+3)e^{\frac{2}{x}}$ 的单调区间、极值以及渐近线方程

四、应用题(10 分)

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，且满足 $xf'(x) = f(x) - 3x^{2}$ ，曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围成图形 D 的面积为 2。求：(1)函数 $f(x)$ (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

五、选答题(7 分)(考生可从下面 2 个题中任选 1 个作答，多做不多得分)

23．已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(0)=0, f(1)=1$ ，证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2)存在不同的 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ ，使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1.$

24．已知 $y=f(x)$ 是由方程 $x\cos y+\sin x+e^y=1$ 所确定的隐函数，求：(1) $\frac{dy}{dx}$ ；

(2) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right]^{\frac{1}{x}}$.